TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

FMIBII

Biomedical engineering degree

Cristina Sánchez López de Pablo
Universidad San Pablo CEU
Madrid

TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

1. **Gráficas**
   - La gráfica de una ecuación
   - Intersecciones de una gráfica con los ejes
   - Simetrías de una gráfica
   - Puntos de intersección

2. **Modelos lineales y velocidades de cambio**
   - La pendiente de una recta
   - Ecuaciones de las rectas
   - Razones y ritmos de cambio
   - Representación gráfica de modelos lineales
   - Rectas paralelas y perpendiculares

TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

3. Funciones y sus gráficas

- Funciones y notación de funciones
- Dominio y rango de una función
- Gráfica de una función
- Transformaciones de funciones
- Clasificaciones y combinaciones de funciones

- **El plano coordenado (René Descartes, 1637) permite:**
  - Formular de manera analítica conceptos geométricos
  - Visualizar de forma gráfica conceptos algebraicos

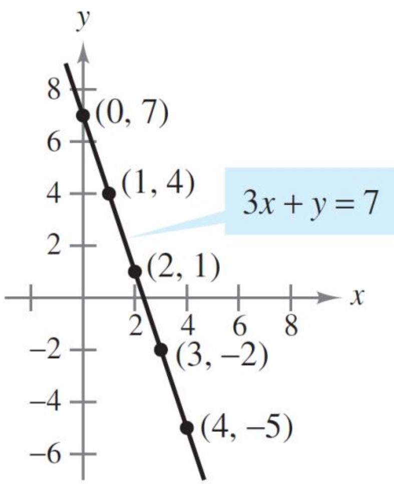
Realizar el cálculo desde múltiples perspectivas (analítica , numérica y gráfica) **incrementará la comprensión de los conceptos fundamentales**

Ejemplo:

Búsqueda de las soluciones **analítica , numérica y gráfica** de la ecuación $3x + y = 7$

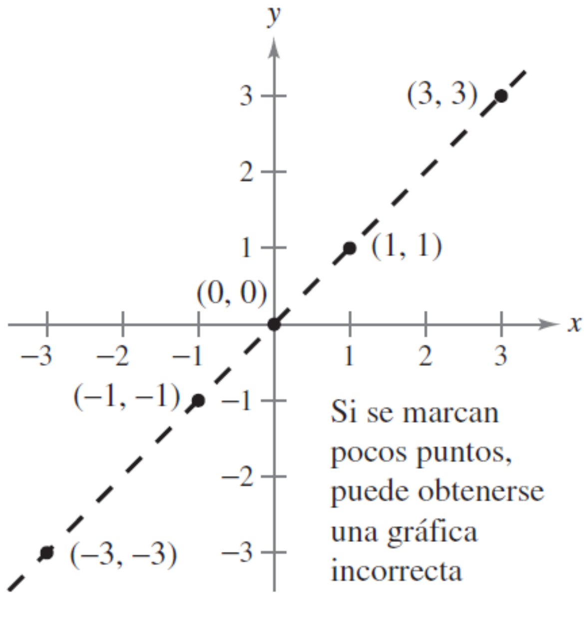
$$y = 7 - 3x$$

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	-2	-5

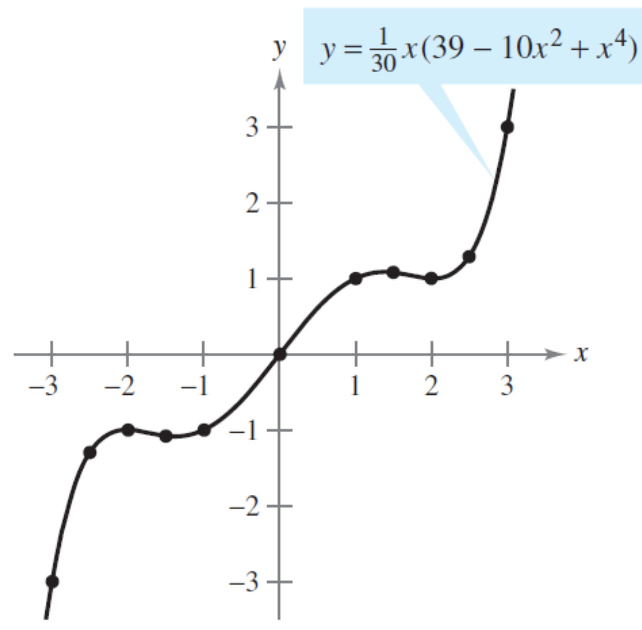


NOTA: Es muy importante tener en cuenta que **si se utilizan demasiados pocos puntos** en la **representación de una gráfica**, se corre el riesgo de obtener una **visión deformada de la gráfica**

Ejemplo: $y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$



a)



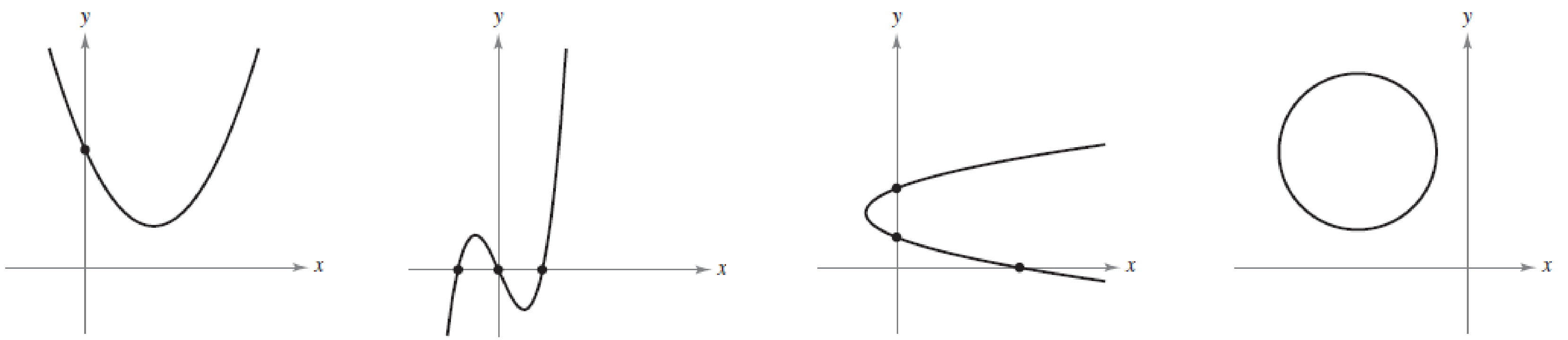
b)

Gráficas:
Intersecciones de una gráfica con los ejes

- **Puntos útiles al representar gráficamente una ecuación:**
  - Intersección con el eje x → $(a, 0)$ → igualar $y = 0$ + despejar x de la ecuación resultante
  - Intersección con el eje y → $(0, b)$ → igualar $x = 0$ + despejar y de la ecuación resultante

NOTA: es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas

Ejemplos:



No hay intersecciones con el eje *x*
Una intersección con el eje *y*

Tres intersecciones con el eje *x*
Una intersección con el eje *y*

Una intersección con el eje *x*
Dos intersecciones con el eje *y*

No hay intersecciones

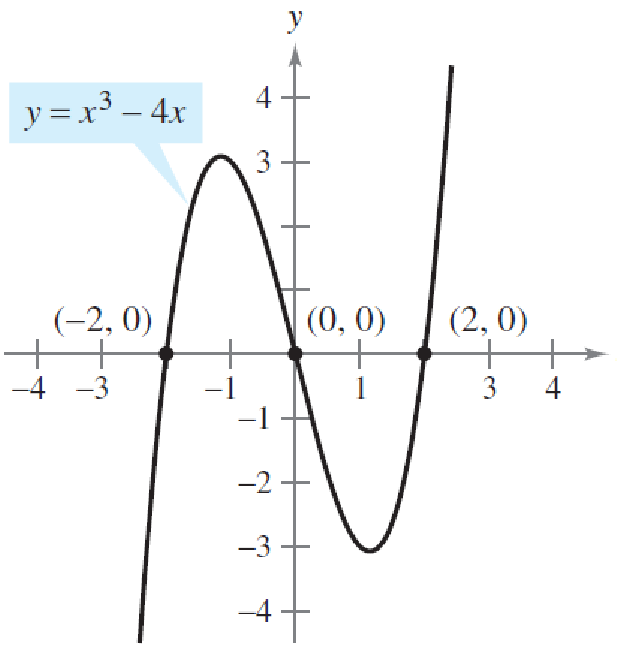
Ejemplo:

Determinar de las intersecciones con los ejes *x* e *y* de la ecuación $y = x^3 - 4x$

- **Para determinar las intersecciones en *x:***
  - *y* se iguala a cero → $x^3 - 4x = 0$
  - Se factoriza la ecuación → $x(x-2)\,(x+2) = 0$
  - Se despeja *x* → $x = 0, 2 \text{ o } -2$

  NOTA: Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en *x*: (0, 0), (2, 0) y (-2, 0)

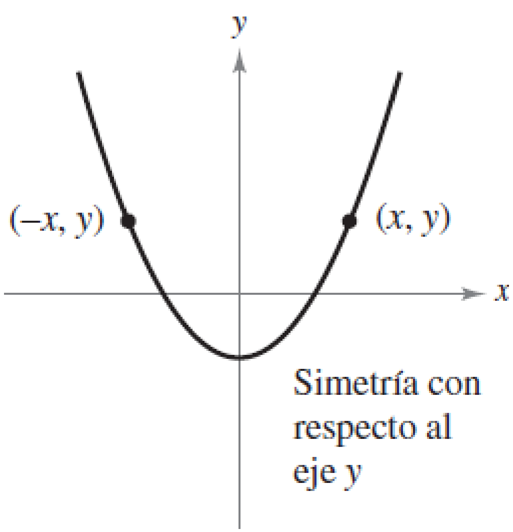
- **Para encontrar las intersecciones en *y*:**
  - *x* se iguala a cero → *y* = 0
  - Se despeja *x* → la intersección en *y* es: (0, 0)



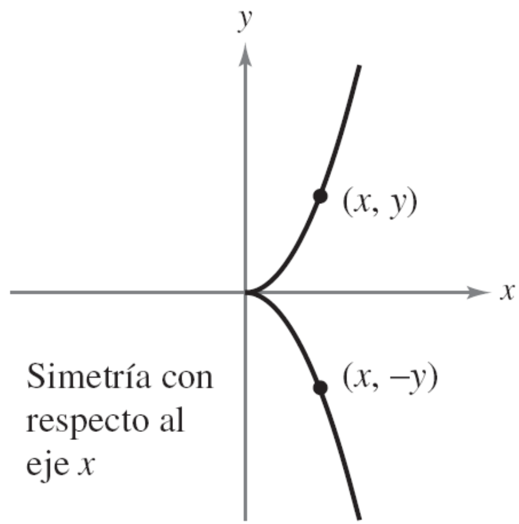
Gráficas y modelos:
Simetrías de una gráfica

CRITERIOS DE SIMETRÍA

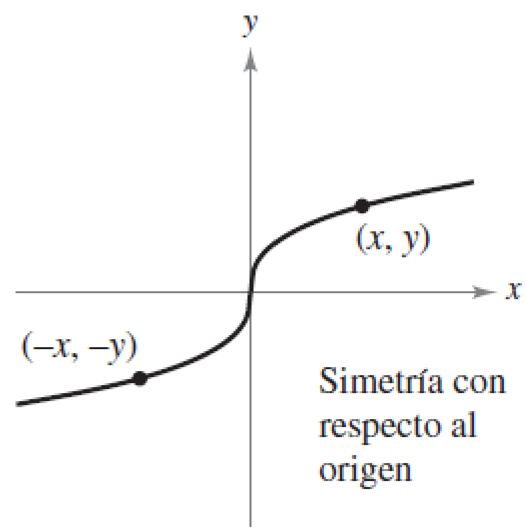
1. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.



Simetría con respecto al eje y



Simetría con respecto al eje x

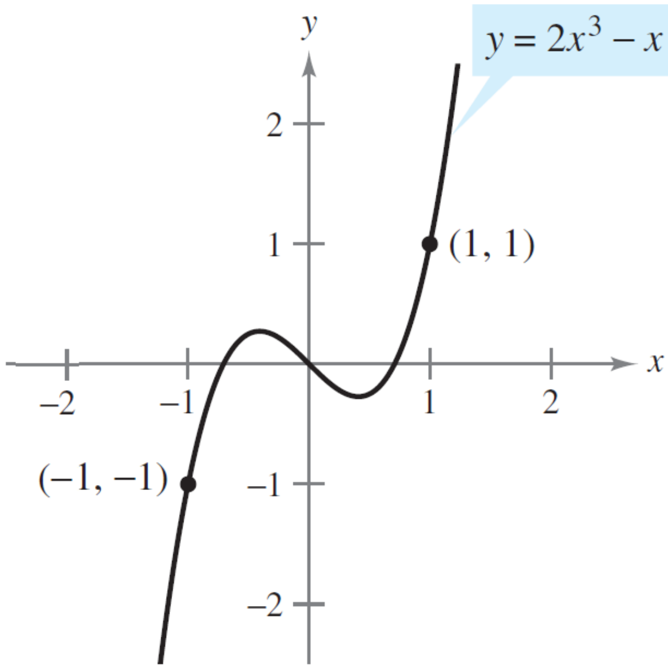


Simetría con respecto al origen

Ejemplo:

Estudiar la simetría respecto al eje *y* y respecto al origen de la siguiente ecuación: $y = 2x^3 - x$

- **Simetría respecto al eje *y*:**
  - Escribir la ecuación original → $y = 2x^3 - x$
  - Sustituir *x* por – *x* → $y = 2(-x)^3 - (-x)$
  - Simplificar → $y = -2x^3 + x$
- **Simetría respecto al origen:**
  - Escribir la ecuación original → $y = 2x^3 - x$
  - Sustituir *x* por – *x* e *y* por – *y* → $-y = 2(-x)^3 - (-x)$
  - Simplificar → $-y = -2x^3 + x$ → $y = 2x^3 - x$



Simetría con respecto al origen

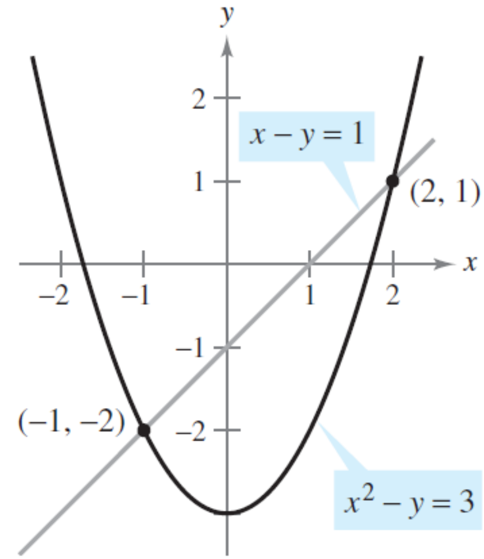
Definición: se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo **punto que satisface ambas ecuaciones**

Ejemplo:

Calcular los puntos de intersección de las siguientes gráficas: $x^2 - y = 3$ y $x - y = 1$

- Primero hay que **representar ambas las gráficas** en el mismo sistema de coordenadas
- De la observación de la gráfica resulta evidente que existen dos **puntos de intersección → proceso para determinarlos:**

$y = x^2 - 3$	Despejar y de la primera ecuación.
$y = x - 1$	Despejar y de la segunda ecuación.
$x^2 - 3 = x - 1$	Igualar los valores obtenidos de y.
$x^2 - x - 2 = 0$	Escribir la ecuación en la forma general.
$(x - 2)(x + 1) = 0$	Factorizar.
$x = 2$ o -1	Despejar x.



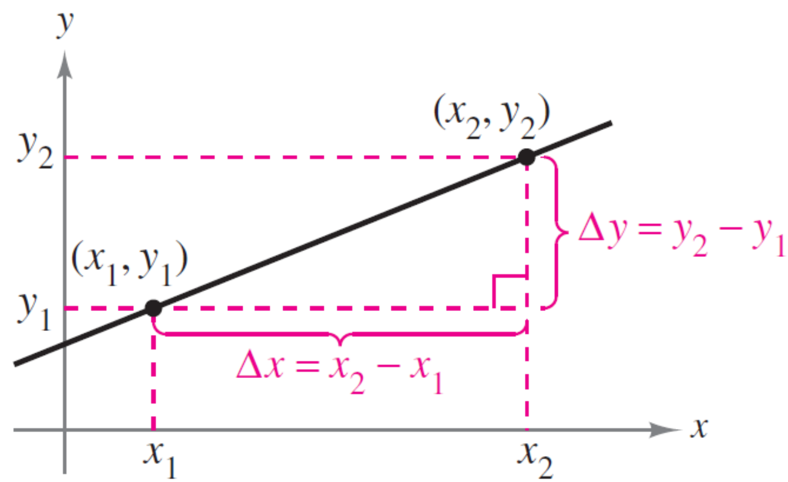
Modelos lineales y velocidades de cambio:
La pendiente de una recta

Definición:

La **pendiente** de una recta no vertical es una medida del número de **unidades que la recta asciende** (o desciende) **verticalmente por cada unidad de variación horizontal** (de izquierda a derecha)

La **pendiente *m* de una recta** no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

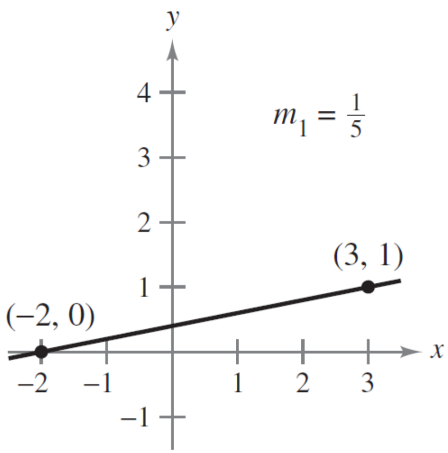
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$



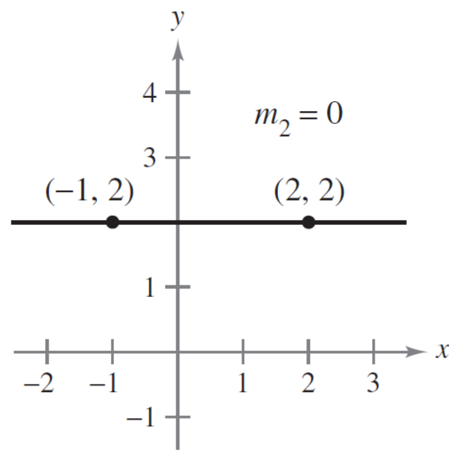
$\Delta y = y_2 - y_1 =$ cambio en y

$\Delta x = x_2 - x_1 =$ cambio en x

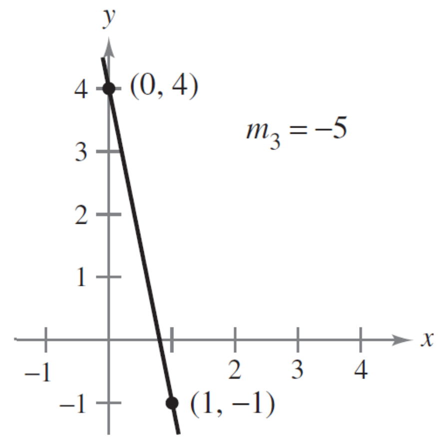
Ejemplos:



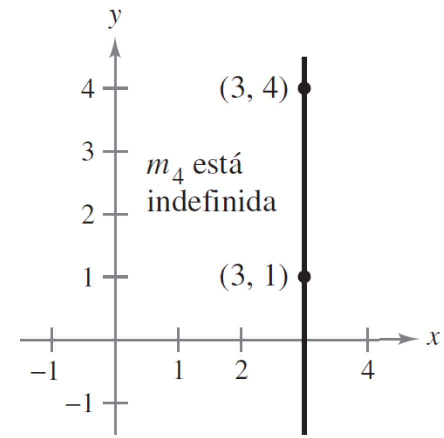
Si m es positiva, la recta sube de izquierda a derecha



Si m es cero, la recta es horizontal



Si m es negativa, la recta baja de izquierda a derecha



Si m es indefinida, la recta es vertical

NOTA: En general, **cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente** de una recta, **mayor es su inclinación**

Para calcular la pendiente de una recta pueden utilizarse **dos de sus puntos cualesquiera** → se puede **escribir la ecuación de una recta** si se conocen su **pendiente y uno de sus puntos**

La **ecuación de la recta** con **pendiente m** que pasa por el **punto (x_1, y_1)** está dada por:

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE → $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo:

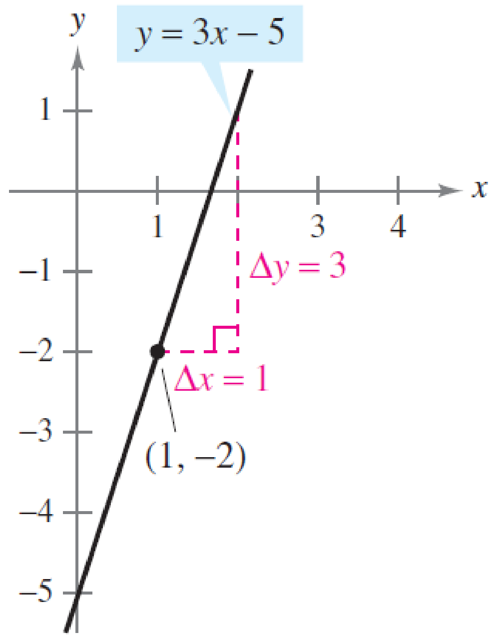
Encontrar la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, -2)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ Forma punto-pendiente.

$$y - (-2) = 3(x - 1)$$ Sustituir y_1 por -2, x_1 por 1 y m por 3.

$$y + 2 = 3x - 3$$ Simplificar.

$$y = 3x - 5$$ Despejar y.



La pendiente de una recta puede interpretarse como:

- **una razón o proporción:** si los **ejes** *x* e *y* tienen la **misma unidad de medida**
- **un ritmo, tasa o velocidad de cambio:** si los **ejes** *x* e *y* tienen **distintas unidades de medida**

Ejemplo:

En un cultivo celular de células cancerígenas al que se le aplica un fármaco experimental portado por nanopartículas, se consigue producir muerte celular en 3440000 células si se utilizan 6880000 nanopartículas y en 13760000 células si se utilizan 27520000 nanopartículas

¿Cuál es en este caso la tasa promedio de células muertas en función del número de nanopartículas portadoras del fármaco utilizadas?

$$Tasa = \frac{13760000 - 3440000\ (células)}{27520000 - 6880000\ (nanopartículas)} = \frac{10320000}{20640000} = 0.5\ \frac{células}{nanopartícula}$$

Clasificación básica de problemas de geometría analítica:

1. Dada la gráfica de una recta, ¿cuál es su ecuación? → **ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE**

2. Dada la ecuación de una recta, ¿cuál es su gráfica? → **ECUACIÓN PENDIENTE-INTERSECCIÓN**

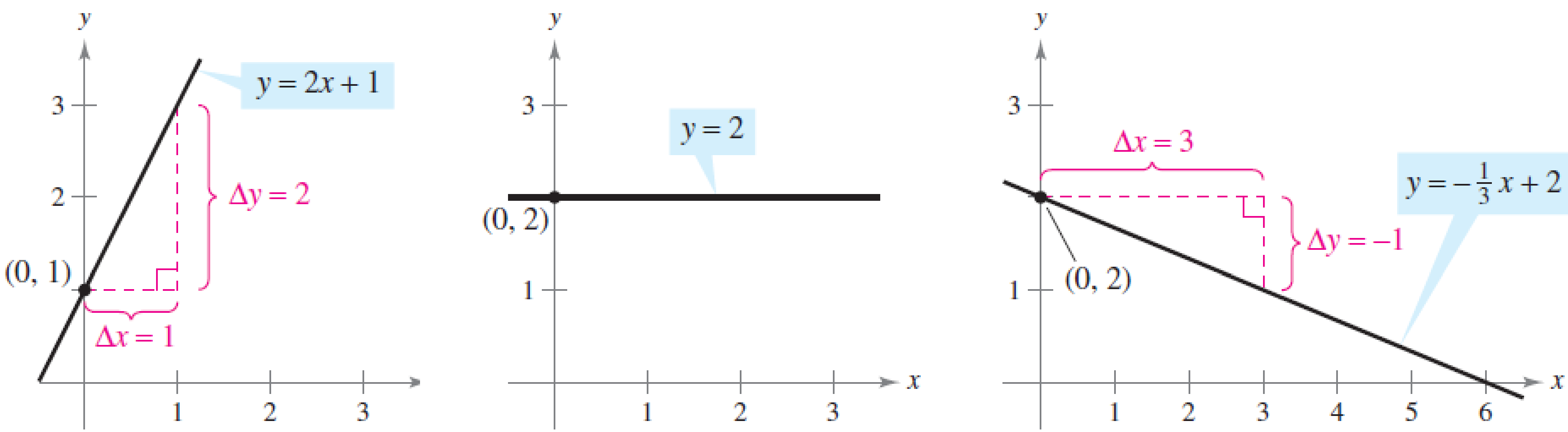
ECUACIÓN PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA
La gráfica de la ecuación lineal $y = mx + b$ es una recta que tiene *pendiente* m y una *intersección* con el eje y en $(0, b)$.

NOTA: La **forma que mejor se adapta** al trazado de la **gráfica de una recta** es la forma **pendiente-intersección de la ecuación** de una recta

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones

a) $y = 2x + 1$ *b)* $y = 2$ *c)* $3y + x - 6 = 0$



a) $m = 2$; la recta sube *b)* $m = 0$; la recta es horizontal *c)* $m = -\frac{1}{3}$; la recta baja

Dado que **la pendiente de una recta vertical no está definida**, su **ecuación no puede escribirse con la forma pendiente-intersección**, sin embargo, **la ecuación de cualquier recta puede escribirse** en su **FORMA GENERAL**:

$$Ax + By + C = 0$$

donde ***A*** **y** ***B*** **no son ambos cero**

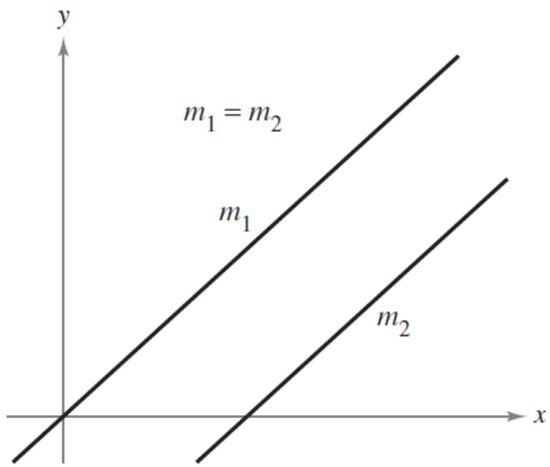
NOTA: **Resumen de ecuaciones de rectas**

1.	Forma general:	$Ax + By + C = 0, \quad (A, B \neq 0)$
2.	Recta vertical:	$x = a$
3.	Recta horizontal:	$y = b$
4.	Forma punto-pendiente:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
5.	Forma pendiente-intersección:	$y = mx + b$

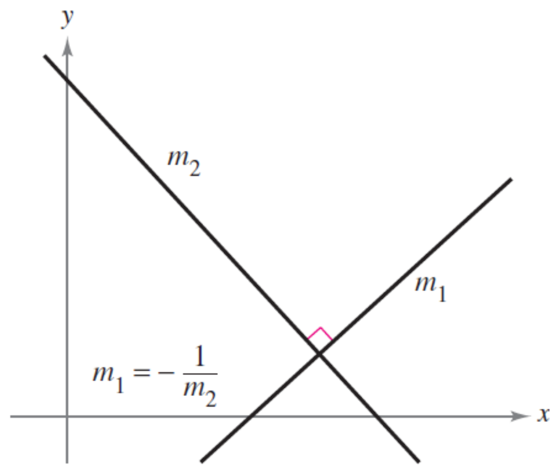
RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

1. Dos rectas no verticales distintas son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir, si y sólo si $m_1 = m_2$.
2. Dos rectas no verticales son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, es decir, si y sólo si

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$



Rectas paralelas



Rectas perpendiculares

Ejemplo:

Hallar la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2, -1) y son:

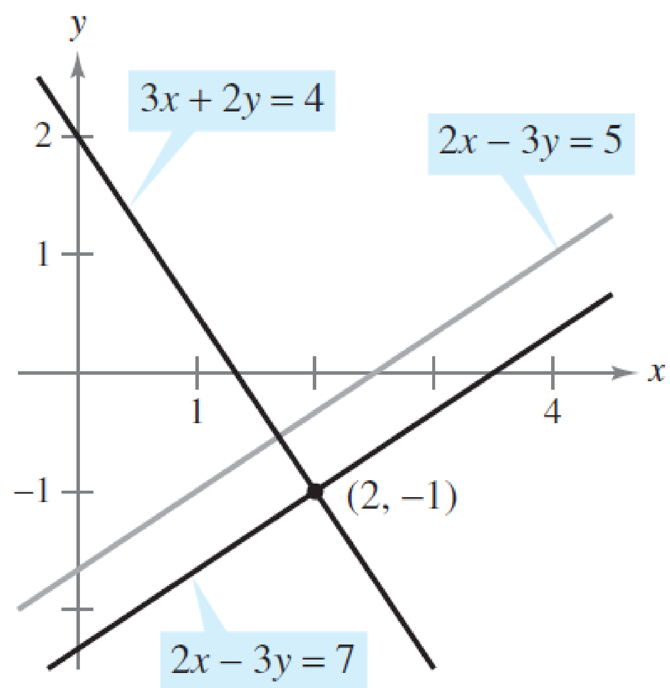
a) Paralela a la recta $2x - 3y = 5$

b) Perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$

Solución:

a) $2x - 3y - 7 = 0$

b) $3x + 2y - 4 = 0$



Rectas paralela y perpendicular a $2x - 3y = 5$

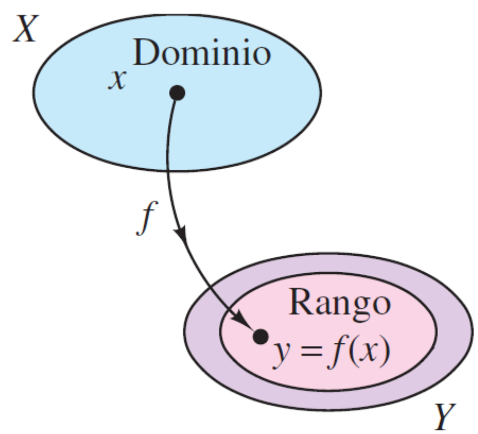
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el **valor de f en x**. El **recorrido o rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X.

NOTA:

- La variable ***x*** se denomina **variable independiente**
- La variable ***y*** se denomina **variable dependiente**



Ejemplo:

El área de un círculo (A) es una función de su radio (r) → $A = \pi r^2$

Modos de describir el dominio de una función:

- **Implícito:** Conjunto de todos los números reales para los que está definida la función
- **Explícito:** conjunto de números que se da junto con la función para los cuáles está definida

Algunos tipos de funciones…

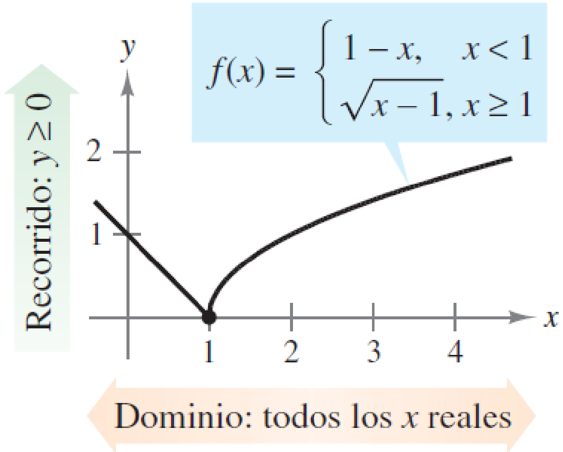
- **INYECTIVA:** una función de *X* a *Y* es inyectiva (uno a uno) si **a cada valor de *y*** perteneciente al rango **le corresponde exactamente un valor *x*** del dominio
- **SUPRAYECTIVA :** una función de *X* a *Y* es suprayectiva si **su rango** (o recorrido) **es todo *Y***

Ejemplo:

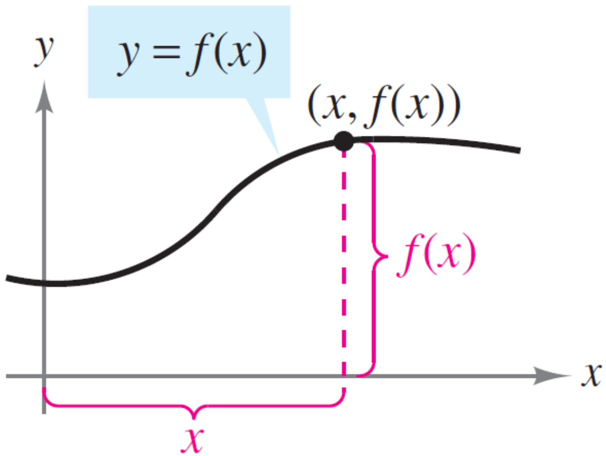
Determinar el dominio y el rango de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x<1\\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$



La gráfica de una función *y = f*(*x*) está formada por todos los **puntos (*x, f*(*x*))**, **donde *x* pertenece al dominio de *f***



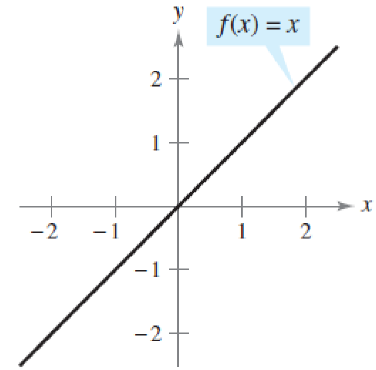
Gráfica de una función

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \text{distancia dirigida desde el eje } y \\ f(x) &= \text{distancia dirigida desde el eje } x \end{aligned}}$$

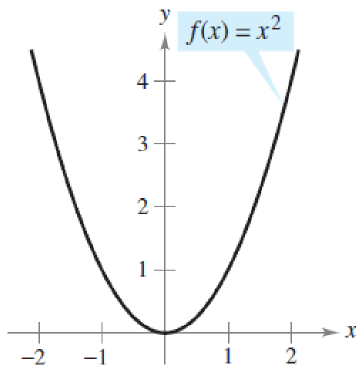
NOTA: una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x como máximo una vez → *CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL*

Funciones y sus gráficas:
Gráfica de una función II

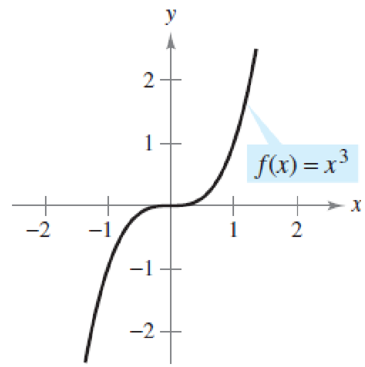
Ejemplo: gráficas de ocho funciones básicas



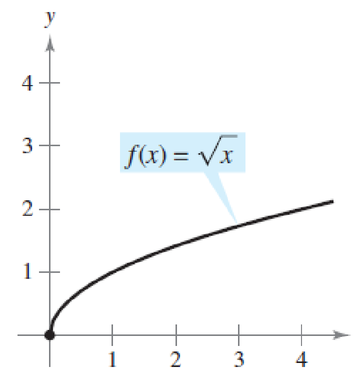
Función identidad



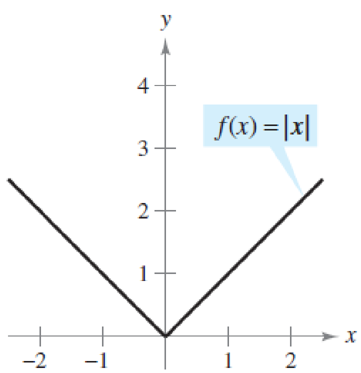
Función cuadrática



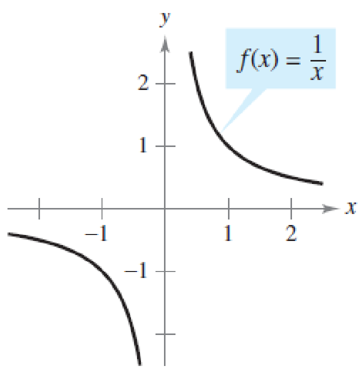
Función cúbica



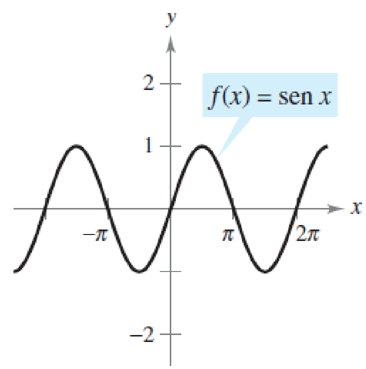
Función raíz cuadrada



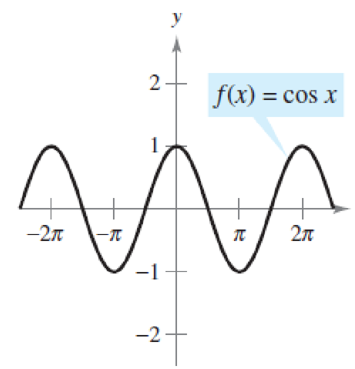
Función valor absoluto



Función racional



Función seno

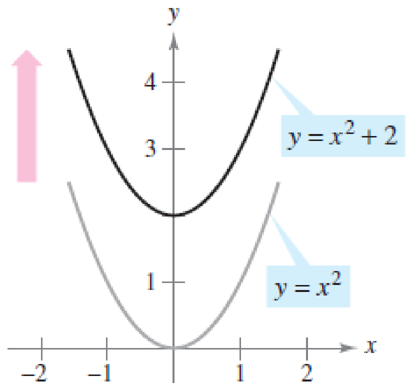


Función coseno

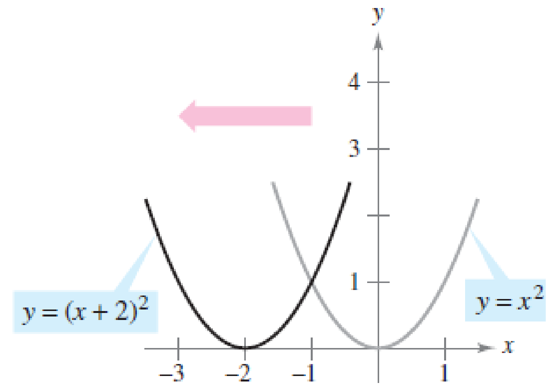
TIPOS BÁSICOS DE TRANSFORMACIONES ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la **derecha**:	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda**:	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades **hacia abajo**:	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades **hacia arriba**:	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$

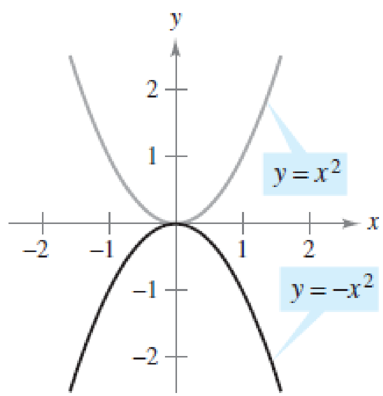
Ejemplo: comparación de la gráfica de $y = x^2$ con otras cuatro funciones cuadráticas



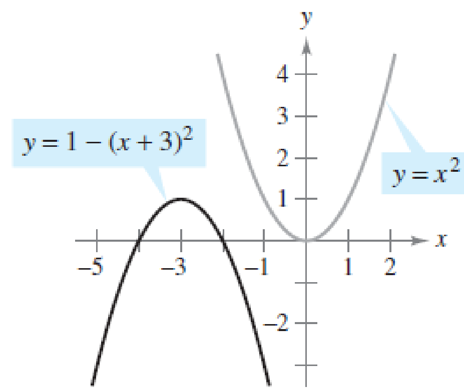
a) Traslación vertical (hacia arriba)



b) Traslación horizontal (a la izquierda)



c) Reflexión



d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Clasificación de funciones elementales:

- Algebraicas (polinómicas, radicales, racionales)
- Trigonométricas (seno, coseno, tangente…)
- Exponenciales y logarítmicas

Funciones trascendentes

El tipo más común de función algebraica es la función polinomial:

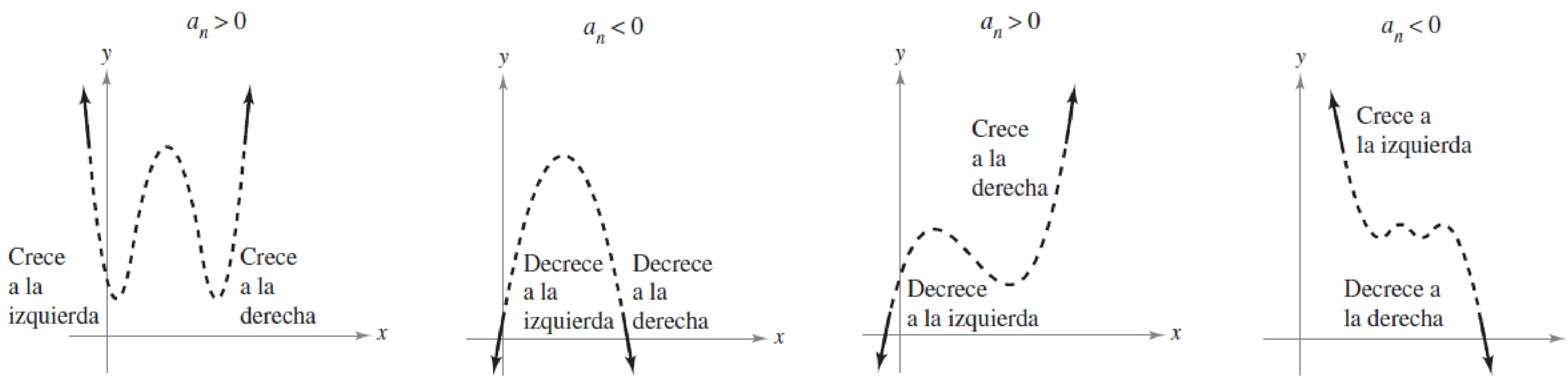
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde:

- n es un entero no negativo
- Las constantes a_i son coeficientes siendo a_n el coeficiente dominante y a_0 el término constante de la función polinomial

Prueba del coeficiente dominante para funciones polinomiales:

Determina el **comportamiento a la derecha y a la izquierda de una gráfica** a partir del **grado** de la función (par o impar) y del **coeficiente dominante** a_n



Gráficas de funciones polinomiales de grado par

Gráficas de funciones polinomiales de grado impar

Combinaciones de funciones:

1. Suma, diferencia, producto, cociente

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x-3) + (x^2+1)$$ Suma.

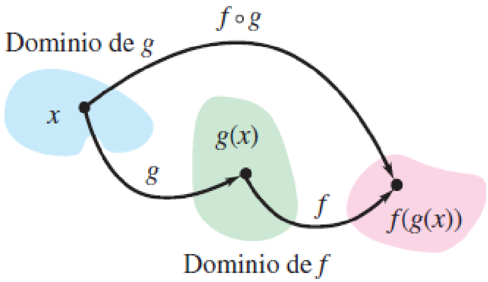
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+1)$$ Diferencia.

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x-3)(x^2+1)$$ Producto.

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{x^2+1}$$ Cociente.

2. Composición → FUNCIÓN COMPUESTA

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA
Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función **compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f



Algunas definiciones…

- **Cero de *f*:**
  - La **intersección en *x*** de una gráfica es todo **punto (a, 0)** en el que la **gráfica corta al eje *x***
  - Si la **gráfica representa una función *f***, el número **a es un cero de *f*** (solución de la ecuación $f(x) = 0$)

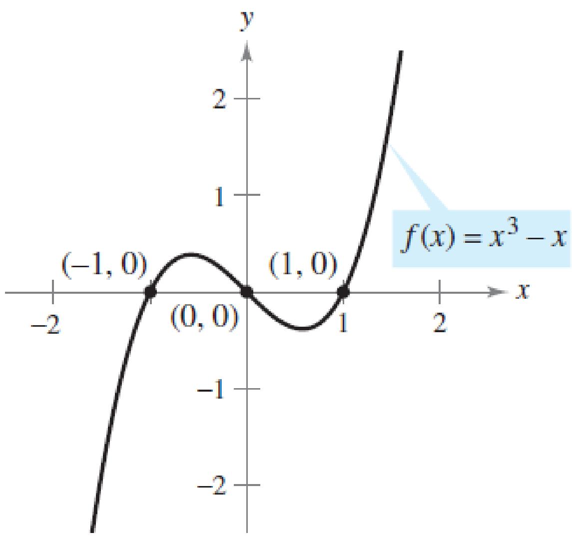
- **Funciones pares e impares:**
  - Una función es **par** si su gráfica **es simétrica respecto al eje *y***
  - Una función es **impar** si su gráfica es **simétrica respecto al origen**

PRUEBA PARA LAS FUNCIONES PARES E IMPARES
La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$. La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

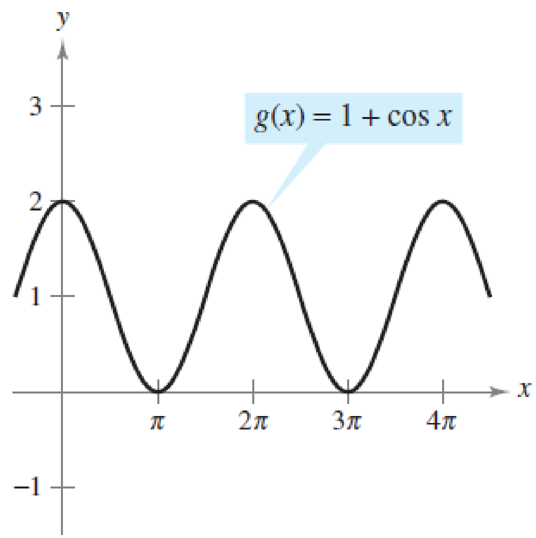
Ejemplo:

- Determinar si cada una de la siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas
- Calcular los ceros de la función

a) $f(x) = x^3 - x$ ***b***) $g(x) = 1 + \cos x$



a) Función impar



b) Función par

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Trazar la **gráfica de una ecuación**
- Encontrar las **intersecciones de una gráfica** con los ejes
- Analizar las posibles **simetrías de una gráfica** con respecto a un eje y el origen
- Encontrar los **puntos de intersección de dos gráficas**
- Encontrar la **pendiente de una recta** que pasa por dos puntos
- Escribir la **ecuación de una recta dados un punto y su pendiente**
- Interpretar la **pendiente como razón o ritmo** en aplicaciones cotidianas
- Trazar **la gráfica de una ecuación lineal** en la forma **pendiente-intersección**
- Escribir las **ecuaciones de rectas que son paralelas o perpendiculares** a una dada
- Usar la **notación de función** para **representar y evaluar funciones**
- Encontrar el **dominio y rango** de una función
- Trazar **la gráfica de una función**
- Identificar los diferentes **tipos de transformaciones de las funciones**
- **Clasificar funciones** y **reconocer combinaciones** de ellas